CH8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 26 :

1. a/ M(z) est invariant par f ssi z'=z en posant z=x+iy

$$\text{ssi } \frac{3+4i}{5}(x-iy)+\frac{1-2i}{5}=x+iy$$

ssi (3+4i)(x-iy)+1-2i=5(x+iy)

ssi 1+3x+4y+i(4x-3y-2)=5x+i5y

$$\text{ssi } \begin{cases}1+3x+4y=5x\\4x-3y-2=5y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y-1=0\\4x-8y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow 2x-4y-1=0$$

Conclusion : L'ensemble des points invariants par f est la droite Δ d'équation

Δ : 2x-4y-1=0

b/ f est une similitude indirecte de rapport k= $\left|\frac{3+4i}{5}\right|=1$ donc f est un antidéplacement ayants des points invariants donc f est une symétrie axiale d'axe la droit Δ :2x-4y-1=0

2. a/ z' réel ⇔ Im(z')=0⇔4x-3y-2=0 Donc D est la droite d'éq :4x-3y-2=0

b/ 4x-3y=2 (2 ;2) est une solution particulière triviale

un travail analogue à l'ex 12 permet de trouver $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(3k+2\ ;4k+2)\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

c/ Les poits de D dont les coordonnées sont des entiers sont :M=(3k+2 ;4k+2) ;k∈ℤ

1. z=1+iy ⇒ $z'=\frac{3+4i}{5}(1-iy)+\frac{1-2i}{5}=\frac{4+4y+i(2-3y)}{5}$

réel(z') entier $\Leftrightarrow\frac{4+4y}{5}=k\Leftrightarrow 4(1+y)=5k\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}5|4(1+y)\\or\ 5\wedge 4=1\end{matrix}\right)\Rightarrow 5|1+y$ ⇒y=5k-1

y=5k-1 ⇒ $Im(z')=\frac{2-3(5k-1)}{5}=\frac{5-15k}{5}=1-3k$ ⇒ Im(z') est un entier

Cl : Réel(z') et Im(z') sont entiers ssi y=5k-1 ; k∈ℤ

EX 27

1. $(a^2+ab-b^2)^2=1$ ⇒ $a^2+ab-b^2=1$ ou $a^2+ab-b^2=-1$

⇒ a(a+b)-b.b=1 ou a(a+b)-b.b=-1 Alors d'aprés th de Bézout a et b sont premiers entre eux

2. Si x=y alors (E) ⇔ $(xy)^2=1\Leftrightarrow x^4=1\Leftrightarrow x=1$ ou x=-1

Cl : Les solutions de (E) telles que x=y sont (1,1) et (-1,-1)

3. a/ (p,q) solution ⇒ $(p^2+pq-q^2)^2=1$

$(q^2+q(p+q)-(p+q)^2)^2=(q^2+pq+q^2-p^2-q^2-2pq)^2=(-p^2-pq+q^2)^2=(p^2+pq-q^2)^2=1$

Donc (q,p+q) est une solution de (E).

b/ On a (q,p+q) est une solution de (E) Alors d'après a/ (p+q,q+p+q) solution

Donc (p+q,p+2q) est une solution de (E)

c/ On a (1,1) solution ,en utilisant 3. a/ on obtient (1,2) ;(2, 3) ;(3,5) ;(5,8) et (8,13) solutions de (E).

Qarray.tn Aqra Blech Qarray.tn